7 ECUAȚII ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE

7.1 Separarea rădăcinilor

$$f(x)=0$$

Ecuație algebrică – dacă $f(x)$ este polinom.

Ecuația transcendentă – în caz contrar.

Rădăcină aproximativă – valoare ξ' apropiată de valoarea exactă ξ.

Definiții neechivalente:

– numărul ξ' cu proprietatea $|\xi'-\xi|<\varepsilon\ (\varepsilon>0)$

– numărul ξ' cu proprietatea $|f(\xi')|<\varepsilon$

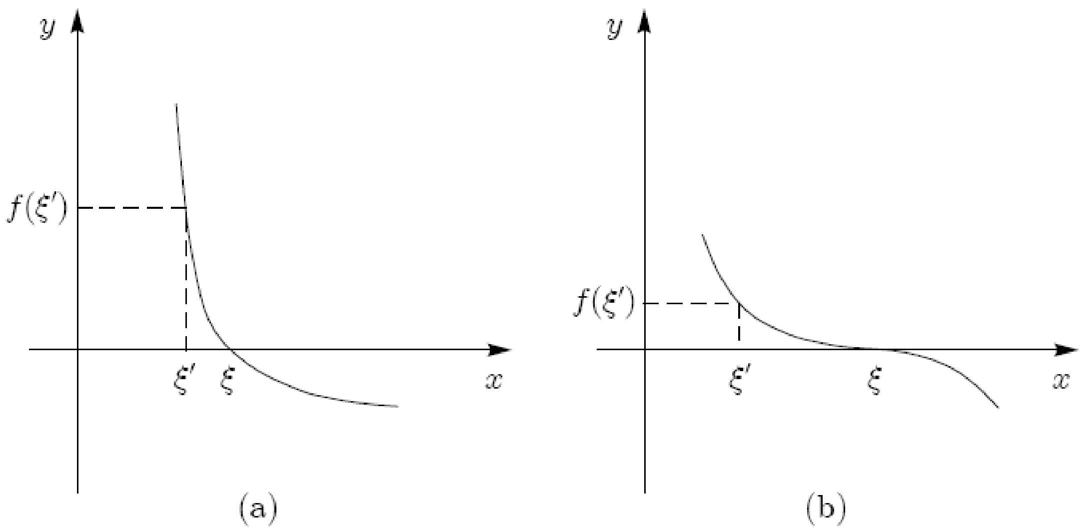

FIGURA 7.1. Cazuri de rădăcini aproximative care nu satisfac simultan criteriile $|\xi'-\xi|<\varepsilon$ şi $|f(\xi')|<\varepsilon$

Determinarea rădăcinilor reale:

1. separarea rădăcinilor – stabilirea unei partiții $x_{\min}=x_1, x_2, \ldots, x_M=x_{\max}$ – orice $[x_m, x_{m+1}]$ să conțină cel mult o rădăcină;
2. calculul rădăcinilor separate prin procedee iterative de rafinare.

Teorema 7.1 Dacă o funcție continuă $f(x)$ admite valori de semn opus la capetele unui interval $[a,b]$, adică $f(a)\cdot f(b)<0$, atunci acel interval conține cel puțin o rădăcină a ecuației $f(x)=0$.

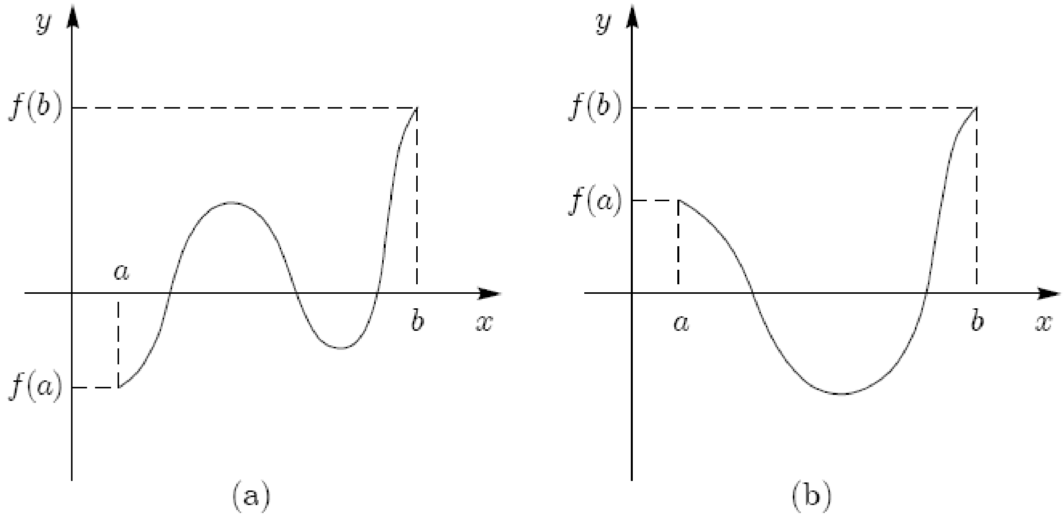

FIGURA 7.2. Exemple de rădăcini neseparate.

Separarea rădăcinilor:

- Determinarea semnelor funcției $f(x)$ în punctele unei partiții $\{x_m\}$.
- Dacă $[x_m, x_{m+1}]$ sunt suficient de mici, fiecare subinterval va conține cel mult o rădăcină.
- În intervalele cu $f(x_m) \cdot f(x_{m+1}) > 0$ nu va exista nici o rădăcină.
- În intervalele cu $f(x_m) \cdot f(x_{m+1}) \le 0$ va exista o singură rădăcină.

7.2 Metoda bisecției (metoda înjumătățirii)

Fie $f(x)$ continuă pe $[a,b]$ şi fie ecuația:

$$f(x) = 0.$$

Presupunem că în urma separării rădăcinilor există cel mult o rădăcină $\xi \in [a,b]$.

Împărțim $[a,b]$ în mod repetat în părți egale, păstrând semiintervalul $[a_i, b_i]$ la capetele căruia funcția are semne opuse.

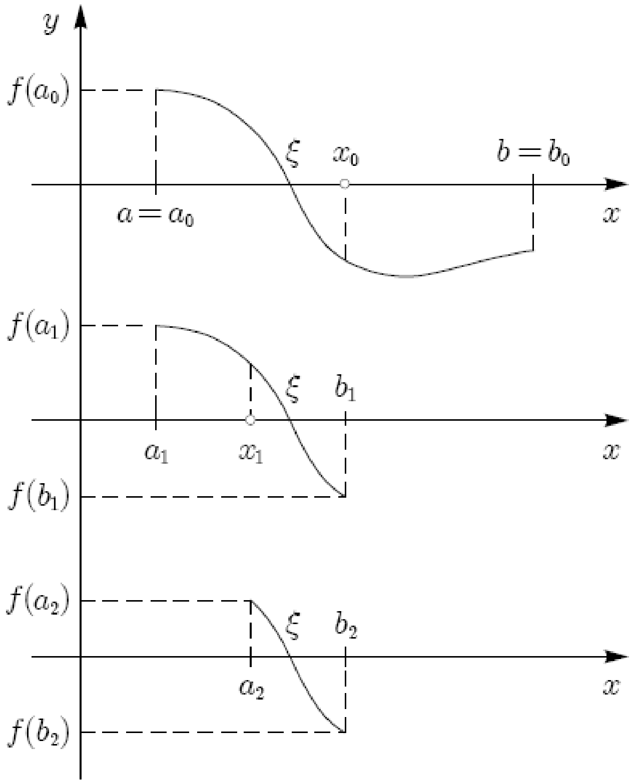

FIGURA 7.3. Procesul de înjumătățire a intervalului de căutare în cazul metodei bisecției.

După i paşi rezultă $[a_i, b_i]$ astfel încât

$$f(a_i) \cdot f(b_i) < 0.$$

Lungimea intervalului $[a_i, b_i]$ este:

$$b_i - a_i = \frac{b-a}{2^i}.$$

Înjumătățind $[a_i, b_i]$ prin

$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

rezultă fie rădăcina exactă $\xi = x_i$, fie un nou interval $[a_{i+1}, b_{i+1}]$.

Procesul se încheie, considerând ca rădăcină aproximativă $\xi' = x_i$, când

$$\left|\frac{b_i - a_i}{x_i}\right| \le \varepsilon \text{ sau } |f(x_i)| \le \varepsilon.$$

7.3 Metoda poziției false (metoda corzii)

În general mai eficientă decât metoda bisecției.

Avantajoasă însă tot numai pentru determinarea grosieră a rădăcinilor reale.

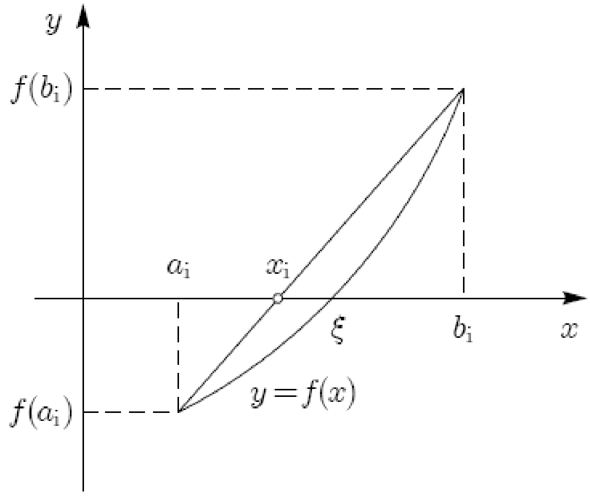

FIGURA 7.4. Împărțirea intervalului de căutare prin intermediul corzii care uneşte punctele $(a_i, f(a_i))$ şi $(b_i, f(b_i))$ în cazul metodei poziției false.

Se înlocuieşte funcția cu coarda – **punctul de intersecție** x_i cu axa absciselor:

$$\frac{x_i - a_i}{b_i - a_i} = \frac{-f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)} \quad \Rightarrow \quad x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}.$$

După un anumit număr de paşi:

- fie o rădăcină exactă $\xi = x_i$, astfel încât $|f(x_i)| = 0$
- fie o secvență de intervale $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \ldots, [a_i, b_i], \ldots$ cu

$$a_{i+1} = a_i, \qquad b_{i+1} = x_i, \qquad \text{dacă } f(a_i)\cdot f(x_i) < 0$$

$$a_{i+1} = x_i, \qquad b_{i+1} = b_i, \qquad \text{dacă } f(a_i)\cdot f(x_i) > 0,$$

astfel încât

$$f(a_{i+1})\cdot f(b_{i+1}) < 0.$$

După fiecare partiționare a intervalului se reactualizează nu numai capetele intervalului, ci şi valorile corespunzătoare ale funcției, $f(a_i)$ şi $f(b_i)$.

7.4 Metoda aproximațiilor succesive

Una dintre metode numerice foarte importante – utilizabilă pentru rafinarea rădăcinilor.

Presupunem că $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$ şi se cere rezolvarea ecuației:

$$f(x) = 0,$$

Se pune sub forma echivalentă:

$$x = \varphi(x).$$

Pornind de la aproximația inițială x_0 pentru rădăcina $\xi \to$ şirul de aproximații succesive:

$$x_{i+1} = \varphi(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Dacă şirul este convergent $\to \exists \xi = \lim x_i$.

Dacă $\varphi(x)$ este continuă $\rightarrow \xi = \varphi(\xi)$ – rădăcina ecuației

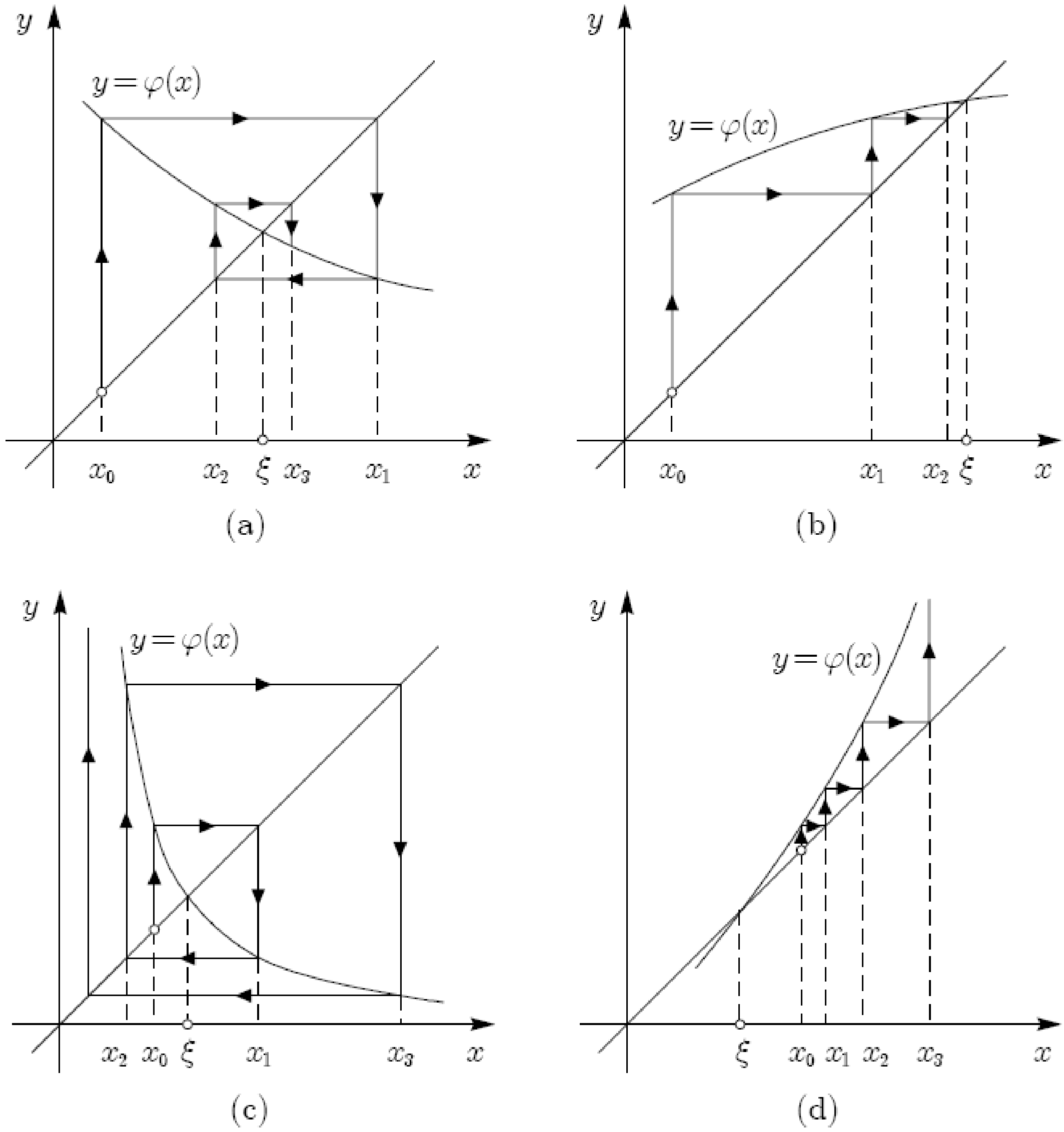

FIGURA 7.5. Procese iterative în metoda aproximațiilor succesive aplicată ecuației $x = \varphi(x)$ pentru: a) $-1 < \varphi'(x) < 0$; b) $0 < \varphi'(x) < 1$; c) $\varphi'(x) < -1$; d) $\varphi'(x) > 1$.

Rădăcină reală ξ pt. $x = \varphi(x)$ –abscisa punctului de intersecție dintre $y = \varphi(x)$ şi $y = x$.

Procesul este convergent (metoda aplicabilă) numai în intervalele unde

$$\varphi'(x) < 1 .$$

Teorema 7.2 Fie ecuația

$$x = \varphi(x),$$

cu funcția $\varphi(x)$ definită şi derivabilă pe $[a,b]$. Dacă este satisfăcută inegalitatea

$$|\varphi'(x)| \le \lambda < 1$$

pentru orice $x \in [a,b]$, atunci şirul de iterare definit de relația

$$x_{i+1} = \varphi(x_i), \quad i = 0,1,2,\ldots$$

converge către rădăcina (unică dacă există) $\xi \in [a,b]$ a ecuației, indiferent de valoarea inițială x_0.

Cu cât e mai mic λ, cu atât mai rapid converge procesul către rădăcina ξ

$f(x)=0$ poate fi înlocuită cu ecuația echivalentă:

$$x = x - f(x) \quad \text{adică} \quad \varphi(x) = x - f(x).$$

Procesul iterativ:

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i), \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

Condiție de convergență:

$$\delta_i \equiv \left|\Delta x_i / x_{i+1}\right| \le \varepsilon \qquad \text{sau} \qquad \left|\Delta x_i\right| \le \varepsilon \left|x_{i+1}\right|$$

Corecția rădăcinii:

$$\Delta x_i \equiv x_{i+1} - x_i = -f(x_i).$$

Exemplu:

$$x - e^{-x} = 0.$$

– Dacă se alege $f(x) = x - e^{-x}$

$$\varphi(x) = e^{-x}$$

$$\left|\varphi'(x)\right| = e^{-x} < 1.$$

Procesul converge către x = 0.567143.

– Dacă se alege $f(x) = e^{-x} - x$

$$\varphi(x) = 2x - e^{-x}$$

$$\left|\varphi'(x)\right| = 2 + e^{-x} > 1.$$

Procesul diverge rapid.

7.5 Metoda lui Newton

Metoda Newton-Raphson sau metoda tangentei – eficiență deosebită.

Presupunem $f(x)$ continuă pe $[a,b]$ şi

$$f(x) = 0$$

are o rădăcină reală $\xi \in [a,b]$, iar $f'(x)$ şi $f''(x)$ sunt **continue** şi **păstrează semnul**.

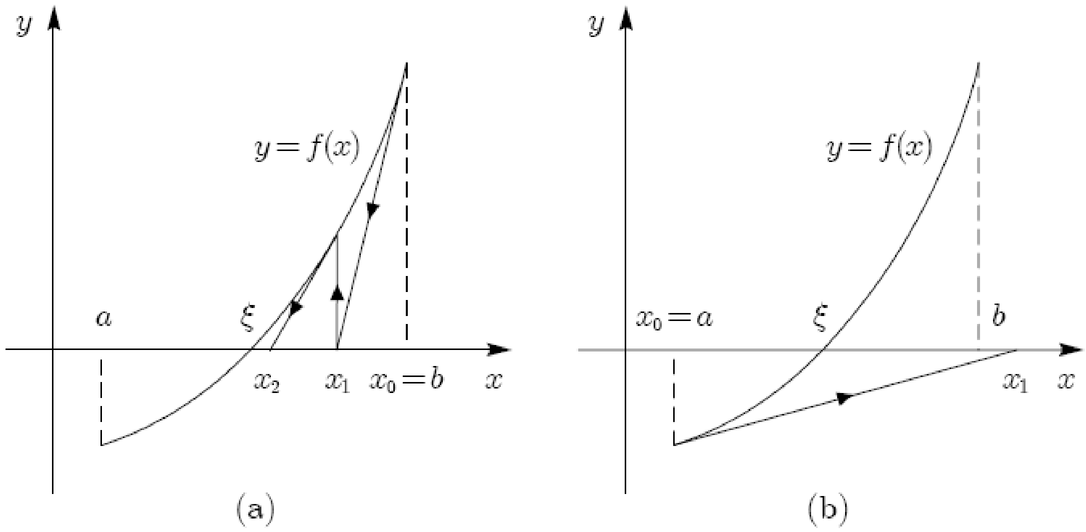

FIGURA 7.6. Determinarea aproximațiilor succesive în metoda Newton-Raphson. În cazul (b) $f(x_0)\cdot f''(x_0)<0$ şi convergența este mai lentă.

Aproximație inițială x_0 pentru ξ.

Aproximație îmbunătățită x_1 ducând tangenta la $y=f(x)$ în $(x_0, f(x))$:

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1} \quad \Rightarrow x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Procesul iterativ:

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \qquad i=0,1,2,\ldots$$

Funcția de iterare:

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Condiția de convergență (ca în metoda aproximațiilor succesive):

$$|\varphi'(x)|<1.$$

Criteriu de convergență:

$$\delta_i \equiv |\Delta x_i / x_{i+1}| \le \varepsilon \qquad \text{sau} \qquad |\Delta x_i| \le \varepsilon |x_{i+1}|.$$

Corecția rădăcinii:

$$\Delta x_i \equiv x_{i+1}-x_i=-f(x_i)/f'(x_i).$$

Metoda lui Newton converge în general mai rapid decât metoda aproximațiilor succesive.

7.6 Metoda secantei

Asemănătoare metodei Newton-Raphson – nu necesită evaluarea derivatei funcției.

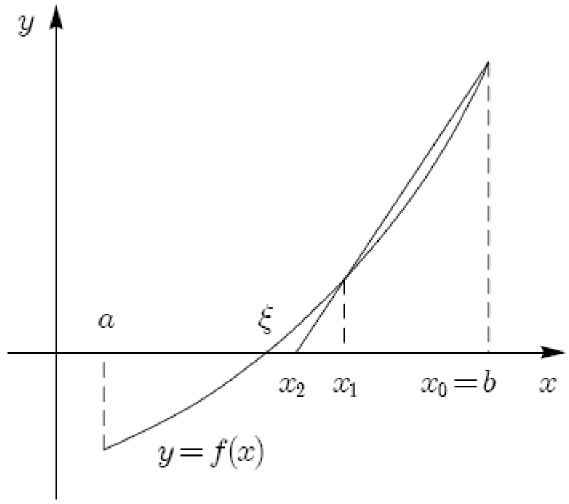

FIGURA 7.7. Determinarea aproximațiilor succesive în metoda secantei.

Tangenta este aproximată de coarda care uneşte punctele pentru două estimări anterioare.

Dezavantaj – rădăcina nu rămâne izolată. Nu este garantată convergența.

Din formula metodei Newton-Raphson:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \qquad f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Relația de recurență (implică trei aproximații succesive ale rădăcinii):

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})},$$

x_1 se poate obține din x_0 aplicând metoda aproximațiilor succesive:

$$x_1 = x_0 - f(x_0).$$

Bibliografie

[1] J. Ortega şi W. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables (Academic Press, New York, 1970).

[2] N.S. Bakhvalov, Numerical Methods (MIR Publishers, Moskow, 1977).

[3] Gh. Dodescu, Metode numerice în algebră, Editura tehnică, Bucureşti, 1979).

[4] M. Toma şi I. Odăgescu, Metode numerice şi subroutine, Editura tehnică, Bucureşti, 1980).

[5] B.P. Demidovich şi I.A. Maron, Computational Mathematics (MIR Publishers, Moskow, 1981).

[6] R.L. Burden şi J.D. Faires, Numerical Analysis, Third Edition (Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1985).

[7] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling şi B.P. Flannery, Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing, Second Edition (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).